جلد ۱، شماره ۱ (بهار و تابستان ۱۴۰۰) صص ۳۴-۲۴
شناسه DOI: 10.22067/tmsj.2021.68234.1004
https://tmsj.um.ac.ir
مقاله علمی-ترویجی

تعبیرفیزیکی و هندسی مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری کسری

حسین غلامی چهکند و مرتضی گچ‌پزان*

گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد
gholamihossein60@yahoo.com
gachpazan@um.ac.ir

چکیده. در این مقاله به توضیحِ تفسیر فیزیکی و هندسی مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری کسری (یعنی مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از مرتبهٔ دلخواه) برای مشتق‌گیری و انتگرال‌گیریِ کسری ریمان-لیوویل، مشتق‌گیری کسری کاپوتو و پتانسیل ریس پرداخته شده است.

۰. پیش‌گفتار

برای مشتق‌ها و انتگرال‌های مرتبهٔ صحیح، تفسیرهای فیزیکی و هندسی روشنی وجود دارد که دانستن این تعبیرها، استفاده از آن‌ها برای حل مسائل کاربردی در علوم مختلف را آسان می‌کند. اما در مورد مشتق‌ها و انتگرال‌های مرتبهٔ کسری، وضع کمی فرق می‌کند. برای بیش‌تر از سیصد سال، تعبیر فیزیکی و هندسی قابل قبولی برای این نوع از مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری وجود نداشت. فقدان این ، گواهی بر تشکیل اولین کنفرانس بین‌المللی حسابان کسری در سال ۱۹۷۴ در شهر نیوهاون[۱] در ایالات متحده است [۱۳]. اما در این کنفرانس،

2020 Mathematics Subject Classification. 26A33, 26A42.

کلید واژگان. مشتق گیری و انتگرال گیری کسری ریمان-لیوویل،مشتق کاپوتو، پتانسیل ریس .
تاریخ: دریافت ۹۹/۱۰/۲۱ ویرایش ۰۰/۲/۱ پذیرش۰۰/۲/۱۳.

*نویسنده مسئول.

[۱] New Haven

به این سوال پاسخی داده نشد و به همین خاطر، کنفرانس دیگری این بار در شهر استرثکلاید[۲] بریتانیا در سال ۱۹۸۴ برگزار شد [۷]. کنفرانس‌های بعدی نیز که در کشورهای ژاپن و بلغارستان برگزار شدند، نتوانستند برای این سوال پاسخ قابل قبولی ارائه دهند ([۴]،[۱۰]، [۳]،[۶]).

از آن‌جایی که مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری مرتبه‌کسری، تعمیم مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری مرتبهٔ صحیح هستند، تعبیرهایی که برای مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری مرتبهٔ کسری ارائه می‌شود بایستی ارتباط میان مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری مرتبهٔ کسری و همتایان صحیحشان را به درستی نشان دهند. چندین محقق و ریاضی‌دان تلاش کردند تا مشتق‌ها و انتگرال‌های کسری را به هندسهٔ تعابیر کسری ارتباط دهند و میان این دو موضوع ارتباط برقرار کنند که از جملهٔ آن‌ها می‌توان به تلاش‌های نیگ‌ماتولین[۳] و مشرفی[۴] اشاره کرد ([۸]،[۹]). اما روتمن[۵] ثابت کرد که این روش مناسب نیست [۱۴]. یک رویکرد متفاوت برای تفسیر هندسی مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری کسری برپایهٔ مرتبهٔ α-ام توسط بن عدا[۶] پیشنهاد شد [۱] . اما به هر حال صحبت از یک تعبیر هندسی قابل پذیرش برای همه، کار دشواری است.

در این مقاله، یک روش جدید برای پاسخ به این چالش معرفی می‌کنیم. کار خود را با معرفی یک تفسیر هندسی برای چندین نوع انتگرال‌گیری مرتبهٔ کسری آغاز می‌کنیم. آن چندین نوع عبارتند از: انتگرال‌گیری کسری از سمت چپ و راست ریمان-لیوویل [۷] و پتانسیل ریس[۸].

برهمین اساس، یک تفسیر فیزیکی برای انتگرال‌گیری کسری ریمان-لیوویل برحسب یک محور زمان ناهمگن پیشنهاد شده است. علاوه بر آن، یک تعبیر فیزیکی برای مشتق‌گیری کسری ریمان-لیوویل و مشتق‌گیری کسری کاپوتو[۹] پیشنهاد می‌دهیم. اما قبل از آن که وارد بحث پیرامون موضوع اصلی مقاله شویم لازم است در مورد نمادهای به کار رفته در این مقاله توضیح مختصری ارائه دهیم.

نماد ${}_a^cD_b^du(x,t)$ به معنای گرفتن مشتق از تابع $u(x,t)$ است. در فرمول‌های مشتق کسری به طور معمول انتگرال نیز ظاهر می‌شود. دو اندیس پایین نماد فوق یعنی a و b، حدود انتگرال‌گیری را مشخص می‌کنند و حرف c بالا سمت چپ نوع مشتق را مشخص می‌کند. به عنوان مثال اگر در این قسمت حرف R وجود داشته باشد یعنی مشتق ریمان-لیوویل به کار رفته است. نماد d بالا سمت راست نیز مرتبهٔ مشتق را مشخص می‌کند. به عنوان نمونه، نماد ${}_0^RD_x^\alpha u(x,t)$ این طور خوانده می‌شود: مشتق ریمان-لیوویل تابع

---

[۲] Strathclyde
[۳] R.R. Nigmatulin
[۴] M. Moshrefi
[۵] R.S. Rutman
[۶] F. Ben Adda
[۷] Riemann-Liouville
[۸] Riesz potential
[۹] Caputo

$u(x,t)$ از 0 تا x و از مرتبهٔ α. خوانندگان علاقه‌مند برای اطلاعات بیشتر در این زمینه می‌توانند به [۲] مراجعه کنند.

۲. توصیف هندسی عملگرهای مرتبهٔ کسری

۱.۲ مفهوم هندسی عملگرهای مرتبهٔ کسری (انتگرال کسری ازسمت چپ ریمان-لیوویل). در این بخش یک مفهوم هندسی برای عملگر انتگرال ریمان-لیوویل ارائه خواهد شد. عملگر انتگرال ریمان-لیوویل را می‌توان به صورت رابطه (۱.۲) تعریف کرد:

$$ {}_0J_t^{(\alpha)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \quad t \geq 0. \tag{۱.۲}$$

این رابطه را می‌توان به صورت رابطه زیر بازنویسی کرد [۱۲]:

$$ {}_0J_t^{(\alpha)} f(t) = \int_0^t f(\tau) dg_t(\tau) \tag{۲.۲}$$

که در این رابطه

$$ g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} [t^\alpha - (t-\tau)^\alpha]. \tag{۳.۲}$$

$g_t(\tau)$ دارای خواص قابل توجهی می‌باشد. در واقع اگر $t_1 = kt$ و $\tau_1 = k\tau$ در نظر گرفته شود، آن‌گاه

$$ g_{t_1}(\tau_1) = g_{kt}(k\tau) = k^\alpha g_t(\tau). \tag{۴.۲}$$

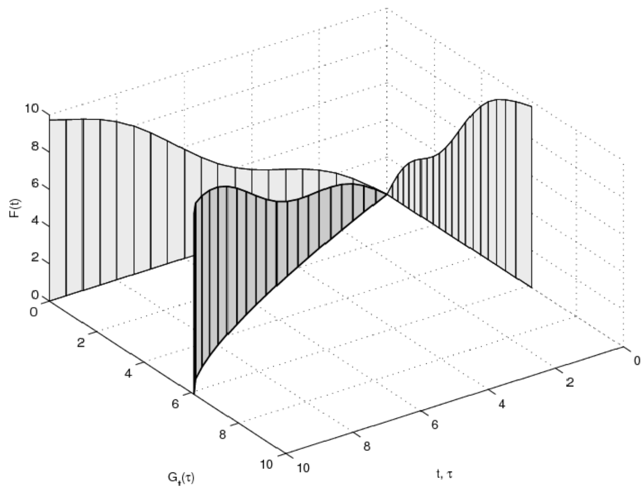
با فرض ثابت بودن t در رابطه (۲.۲) و برای به دست آوردن تعبیر هندسی از این انتگرال، در فضای سه بعدی، سه محور عمود بر هم τ، g و f در نظر گرفته می‌شود. در صفحه (τ, g) می‌توان دیواره‌ای به ارتفاع متغیر $f(\tau)$ رسم کرد که لبه بالایی این دیوار، یک خم سه بعدی در صفحه $(\tau, g_t(\tau), f(t))$ برای $0 \leq \tau \leq t$ خواهد بود. همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است، دیواره‌ی رسم شده در این فضای سه بعدی را می‌توان بر روی دو صفحه عمود بر هم از این فضا تصویر کرد. با مشاهده تصویر این دیواره، بر روی این صفحات می‌توان گفت:

۱. مساحت تصویر این دیواره، بر روی صفحه (τ, f) نشان دهنده‌ی مقدار انتگرال رابطه (۵.۲) است:

$$ {}_0J_t^{(1)} f(t) = \int_0^t f(\tau) dg_t(\tau) \quad t \geq 0. \tag{۵.۲}$$

۲. مساحت تصویر این دیواره بر روی صفحه (g, f)، مقدار انتگرال رابطه (۲.۲) یا همان مقدار انتگرال مرتبه کسری (۱.۲) را نشان خواهد داد. به عبارت دیگر دیواره‌ی تعریف شده، دو سایه ایجاد خواهد کرد. اولین سایه بر روی صفحه (τ, f) ایجاد می‌شود که همان تعریف مشهور سطح زیر منحنی تابع $f(\tau)$ می‌باشد و این تعریف، تعریف انتگرال معمولی (مرتبه صحیح) خواهد بود. اما سایه ایجاد

شده بر روی (g, f)، مفهوم هندسی انتگرال مرتبه کسری رابطه (۱.۲) برای یک نقطه ثابت t خواهد بود.



شکل ۱: تابع $f(t)$ و تصویر آن بر صفحات (τ, f) و (g, f)

اگر $\alpha = 1$ ، آنگاه $g_t(\tau) = \tau$ و هر دو تصویر مساوی خواهد بود. این موضوع به این معنی است که انتگرال معمولی (مرتبه صحیح)، از دیدگاه هندسی حالت خاصی از انتگرال مرتبه کسری ریمان-لیوویل است. حال سوال این است که اگر t تغییر کند چه حالتی رخ خواهد داد؟ اگر مقدار t تغییر کند، دیواره تعریف شده در قسمت قبل نیز همزمان با آن تغییر خواهد کرد. برای نشان دادن این موضوع می‌توان به شکل ۲ توجه کرد. تغییرات به وجود آمده در دیواره، بر تصویر آن در صفحه (g, f) تاثیر داشته و به طور همزمان آن را تغییر خواهد داد. بنابراین در این حالت با مفهوم هندسی دینامیکی انتگرال کسری برای یک تابع با متغیر t، روبه‌رو خواهیم بود.

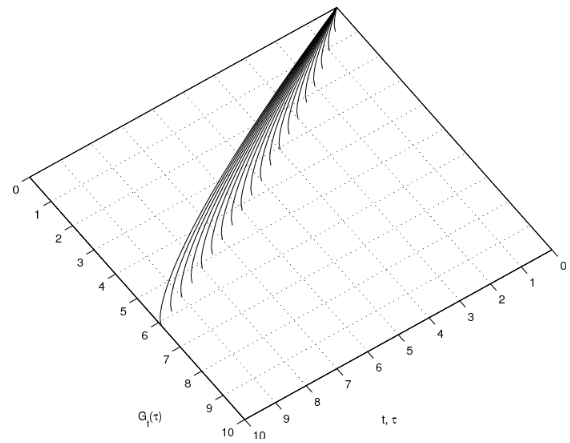
۲.۲ انتگرال کسری از سمت راست ریمان-لیوویل. انتگرال کسری از سمت راست ریمان-لیوویل را در نظر می‌گیریم [۱۲]:

$$ {}_tJ_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b f(\tau)(\tau - t)^{\alpha-1} d\tau \tag{۶.۲} $$

که می‌توانیم (۶.۲) را به صورت زیر بازنویسی کنیم [۱۲]

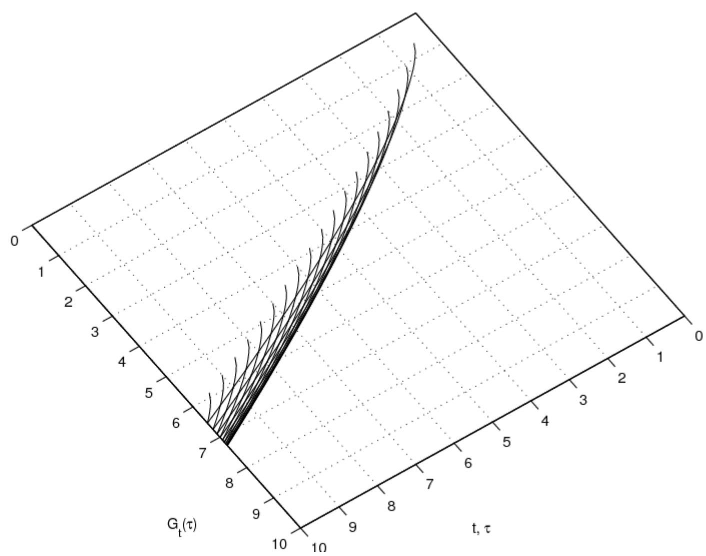
$$ {}_tJ_b^\alpha f(t) = \int_t^b f(\tau) dh_t(\tau), \tag{۷.۲} $$

$$ h_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\{t^\alpha + (\tau - t)^\alpha.\} \tag{۸.۲} $$



شکل ۲: فرآیند تغییر دیواره برای ${}_0J_t^{\alpha}f(t)$ با $\alpha = 0.75$

با تغییر کران پایین در انتگرال (۷.۲) دیواره تعریف شده در قسمت قبل نیز همزمان با آن تغییر خواهد کرد. تغییرات به وجود آمده در دیواره بر تصویر آن در صفحه‌های (g, f) و (τ, f) به ترتیب نشان دهنده انتگرال کسری از سمت راست ریمان-لیوویل و انتگرال معمولی (مرتبه صحیح) می‌باشد.



شکل ۳: فرآیند تغییر دیواره برای ${}_tJ_{10}^{\alpha}f(t)$ با $\alpha = 0.75$

نکتهٔ مهم دیگر آن است که شکل هندسی حاصل از فرآیند تغییر دیواره برای انتگرال‌های چپ و راست ریمان-لیوویل دارای تقارن می باشد اما این تقارن به معنی تقارن داشتن شکل نسبت به محور خاصی نمی‌باشد.

۳.۲ پتانسیل ریس. پتانسیل‌ریس[۱۰] به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۲]:

$$ {}_0R_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^b f(\tau)|\tau - t|^{\alpha-1} d\tau. \tag{۹.۲}$$

با کمی دقت متوجه می‌شویم که رابطه (۹.۲) با مجموع انتگرال‌های چپ و راست ریمان–لیوویل برابر می‌باشد، یعنی

$$ {}_0R_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b f(\tau)(\tau - t)^{\alpha-1} d\tau. \tag{۱۰.۲}$$

پتانسیل ریس را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود [۱۲]:

$$ {}_0R_b^\alpha f(t) = \int_0^b f(\tau) dr_t(\tau) \tag{۱۱.۲}$$

که در آن

$$ r_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \{t^\alpha + sign(\tau - t)|\tau - t|^\alpha\} \tag{۱۲.۲}$$

شکل دیواره متناظر با پتانسیل ریس به وسیله تابع $r_t(\tau)$ توصیف می‌شود. در این حالت دیواره شامل دو قسمت است یکی برای $0 < \tau < t$ که متناظر با انتگرال چپ ریمان–لیوویل است و دیگری برای $t < \tau < b$ که متناظر با انتگرال راست ریمان–لیوویل می‌باشد.

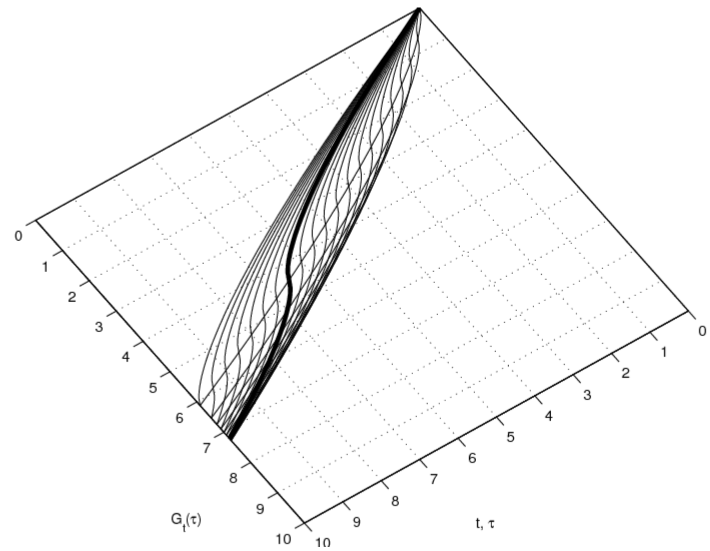
شکل ۴ از کنار هم قرار دادن شکل‌های ۲ و ۳ به دست آمده است که یک تعبیر هندسی برای (۱۰.۲) است. تصویر این دیواره روی صفحه (g, f) نشان‌دهنده‌ی پتانسیل ریس ذکر شده در (۹.۲) است. در حالی که تصویر آن در (τ, f) نشان‌دهنده‌ی انتگرال معمولی (مرتبه صحیح) است:

$$ I(t) = \int_0^b f(\tau) d\tau. $$

از جمله کاربردهای پتانسیل‌ریس می‌توان به استفاده از آن در مدل‌سازی وسایل پزشکی از قبیل سمعک اشاره نمود. که در آن‌ها از معادلهٔ موج سه‌بعدی که برای قسمت وابسته به مشتق زمانی آن یعنی u_{tt}، ضرایب معکوس وابسته به مکان مانند $\frac{1}{c(x)}$ در نظر گرفته می‌شود. این مسئله را می‌توان تبدیل به یک معادله انتگرال فردهلم سه‌بعدی از نوع اول نمود که عملگر انتگرالی آن همان پتانسیل‌ریس می‌باشد [۵].

۴.۲ تعبیر فیزیکی مشتق کسری ریمان–لیوویل. در بخش قبل مفهوم هندسی انتگرال مرتبه کسری با اضافه کردن یک بعد سوم $(g_t(\tau))$، به صفحه $(\tau, f(\tau))$ مورد بررسی قرار گرفت. اگر در روابط بخش قبل،

[۱۰] مارسل ریس (۱۹۶۹–۱۸۸۶) یک ریاضی‌دان مجارستانی است که به خاطر کار روی نظریه اعداد،نظریه پتانسیل،معادلات با مشتقات جزئی، میانگین ریس و تبدیل ریس مشهور است. او بیشتر عمر خود را در دانشگاه لوند سوئد گذراند.



شکل ۴: فرآیند تغییر دیواره برای پتانسیل ریس برای ${}_0R^{\alpha}_{10}f(t)$ با $\alpha = 0.75$

پارامتر τ به عنوان زمان در نظر گرفته شود، تابع $g(\tau)$ را می‌توان زمان انتقال‌یافته دانست. اما وجود دو محور زمان در این رابطه به چه معنی خواهد بود؟

برای پاسخ به این سوال نیاز است که برخی از تعبیرهای موجود در مورد زمان بررسی شود. در حال حاضر تصور ما از محور زمان، یک محور بی‌کران است که به بخش‌های مساوی تقسیم شده‌است (شکل ۵) [۱۲]. سوال این است که آیا تمام این قسمت‌ها با یکدیگر مساوی هستند؟

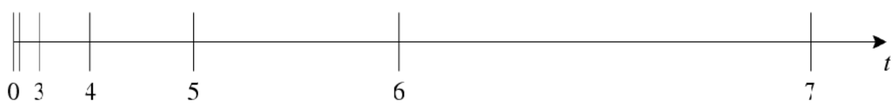
بدیهی است که قابلیت اندازه‌گیری و مقایسه دو بخش یا قسمت از هر کمیت فیزیکی، زمانی میسر خواهد بود که هر دو بخش به طور همزمان در اختیار باشد. به عبارت دیگر، در یک مکان و یک زمان، بتوان آن‌ها را با یک معیار ثابت اندازه‌گیری کرد و یا با کنار هم قراردادن این دو بخش آن‌ها را با هم مقایسه کرد و تساوی آن‌ها را بررسی نمود. با این استنباط از مساوی بودن دو کمیت، قسمت‌های محور زمان (تقسیمات زمانی محور نیمه بی‌کران) قابل مقایسه نخواهند بود چرا که این بخش‌ها تنها به صورت دنباله‌وار و پشت سر هم در اختیار ما هستند. به‌راستی چگونه می‌توان تقسیمات زمان را اندازه‌گیری کرد؟



شکل ۵: محور زمان همگن

محور زمانی که اکنون برای ما به عنوان یک محور بدیهی بوده و تمام روابط و معادلات بر اساس آن آنالیز و تحلیل می‌شود (شکل ۵) تنها با مشاهده برخی رویدادها، که حادث شدن آن‌ها به طور منظم و تکراری فرض

می‌شود، حاصل شده است. کلمنس[۱۱] در مقاله خود می‌نویسد "اندازه‌گیری زمان اساسا یک رویداد شمارشی است، هر پدیده‌ی تکراری در هر کجا که اتفاق بیفتد و قابل شمارش باشد در حقیقت یک اندازه از زمان در اختیار می‌گذارد. ساعت در واقع رویداد تیک را تکرار می‌کند و با شمارش این تیک‌ها، آن‌ها را ساعت، دقیقه و ثانیه و ... می‌نامیم. اما به واقع قادر نیستیم زمان مطلق بین دو تیک را مقایسه کنیم و نمی‌توان با قطعیت اعلام داشت که زمان بین دو تیک متوالی با یکدیگر برابر بوده است". مفهوم ناهمگن بودن زمان، در شکل ۶ نمایش داده شده است. این زمان مطلق را زمان می‌نامند. برای درک بیشتر فرض کنید شخص N در متحرکی نشسته است و دو وسیله اندازه‌گیری در اختیار دارد که یکی از آن‌ها یک سرعت‌سنج متحرک و دیگری یک ساعت است که زمان آن در حال کند شدن است، یعنی در این ساعت تفاوت بین هر دو بخش زمانی متوالی (هر دو تیک متوالی)، دو برابر بخش زمانی قبل از آن خواهد بود (جدول ۱).



شکل ۶: محور زمان ناهمگن (زمان کیهانی)

شخص N، مقادیر سرعت نشان داده‌شده بر روی سرعت‌سنج را در هر ثانیه قرائت می‌کند، بدون آنکه از کند شدن ساعت در طول زمان آگاه باشد.

با استفاده از دو مجموعه داده، که یک مجموعه از آن‌ها داده‌های سرعت خودرو و دیگری زمان‌های قرائت شدن سرعت می‌باشد، شخص N می‌تواند مسافت پیموده شده را تخمین بزند. نتایج مشاهدات این آزمایش در جدول ۱ آمده‌است. بر اساس داده‌های ستون اول و سوم جدول، که توسط شخص N، به ترتیب فوق‌الذکر

جدول ۱: سرعت ثبت شده با استفاده از ساعت

زمان محاسبه شدهٔ شخص N	زمان محاسبه شدهٔ شخص O	سرعت محاسبه شدهٔ شخص N
0	0	10
1	1	11
2	3	12
3	7	13
4	15	12
5	31	11
6	63	10
7	127	9

[۱۱] G. Clemence

یادداشت شده است، می‌توان مسافت طی‌شده را محاسبه کرد:

$$S_N = 10\times 1+11\times 1+12\times 1+13\times 1+12\times 1+11\times 1+10\times 1 = 79m. \quad (۱۳.۲)$$

با این حال اگر یک شاهد O، ازکند شدن زمان ساعت شخص N آگاه باشد و او مسافت طی شده را محاسبه کند مسافت طی شده واقعی توسط شخص N طبق رابطه (۱۴.۲) خواهد بود:

$$S_o = 10\times 1+11\times 2+12\times 4+13\times 8+12\times 16+11\times 32+10\times 64 = 1368m. \quad (۱۴.۲)$$

اکنون با فهم دقیق صورت مساله، در ادامه سعی خواهد شد این مساله به مفهوم فیزیکی عملگرهای مرتبه کسری به ویژه مشتق کسری ریمان–لیوویل پیوند داده شود. بیان ریاضی مساله فوق به این ترتیب می‌باشد:

فرض کنید شخص N با دو وسیله اندازه‌گیری (ساعت و سرعت سنج) در داخل اتومبیلی نشسته است و در حال حرکت، داده برداری از زمان و سرعت حرکت در هر ثانیه را انجام می‌دهد. اما ساعت وی زمان صحیح و درستی را به او نشان نمی‌دهد. اگر τ زمان نادرست و $V(\tau)$ سرعت حرکت اندازه‌گیری شده توسط شخص N باشد، با توجه به نادرست بودن زمان، این شخص مسافت طی شده توسط اتومبیل، از لحظه شروع حرکت (مبدا زمان) تا لحظه t، را از رابطه (۱۵.۲) محاسبه خواهد کرد:

$$d_N(t) = \int_0^t V(\tau)d\tau. \quad (۱۵.۲)$$

حال فرض کنید که زمان درست T، توسط شخص O محاسبه شده و این شخص از رابطه بین زمان درست T و زمان نادرست τ که به صورت $T = g(\tau)$ می‌باشد، آگاه است. بنابراین شخص N بازه‌های زمانی نادرست $d\tau$ را محاسبه می‌کند در حالیکه بازه زمانی درست $dT = dg(\tau)$ خواهد بود. پس شخص O، مسافت طی شده حقیقی توسط اتومبیل را با استفاده از داده‌های سرعت‌سنج شخص N، از رابطه زیر محاسبه خواهد کرد:

$$d_O(t) = \int_0^t V(\tau)dT = \int_0^t V(\tau)dg(\tau). \quad (۱۶.۲)$$

با توجه به مطالبی که در مورد مفهوم هندسی انتگرال مرتبه کسری بیان شد، می‌توان چنین نتیجه گرفت

$$d_O(t) = \int_0^t V(\tau)dg(\tau) = {}_0I_t^{\alpha}V(t). \quad (۱۷.۲)$$

بنابراین انتگرال مرتبه کسری تابع سرعت $V(t)$ یک متحرک، در حالتی که رابطه بین زمان محلی τ و زمان واقعی T، توسط تابع $T = g_t(\tau)$ قابل بیان باشد، به مفهوم مسافت واقعی طی شده توسط آن متحرک خواهد بود. مسافت واقعی طی شده توسط یک متحرک، با استفاده از رابطه $d_O(t) = {}_0I_t^{\alpha}V(t)$ قابل بیان

است. بنابراین می‌توان چنین نتیجه گرفت

$$V(t) = {}_0D_t^{\alpha} d_O(t). \quad (۱۸.۲)$$

یعنی مشتق مرتبه کسری مسافت واقعی طی شده توسط یک متحرک که دارای زمان محلی τ و زمان واقعی $g_t(\tau)$ می‌باشد، به مفهوم سرعت محلی آن متحرک خواهد بود. از طرف دیگر سرعت واقعی متحرک از رابطه (۱۹.۲) قابل محاسبه است

$$V_O(t) = \frac{d}{dt} d_O(t). \quad (۱۹.۲)$$

با ادغام دو رابطه (۱۷.۲) و (۱۹.۲) می‌توان نتیجه گرفت

$$V_O(t) = \frac{d}{dt} {}_0I_t^{\alpha} V(t) = {}_0D_t^{1-\alpha} V(t). \quad (۲۰.۲)$$

بنابراین، مشتق مرتبه $(1-\alpha)$ تابع سرعت محلی یک متحرک ($V(\tau)$)، با زمان محلی τ و زمان واقعی $g_t(\tau)$ برابر با سرعت واقعی این متحرک، از دید یک ناظر خارجی خواهد بود.

۵.۲ تعبیر فیزیکی مشتق کسری کاپوتو. با به‌کاربردن انتگرال کسری از مرتبه $\beta = 1 - \alpha$ در دو طرف رابطه (۲۰.۲)، داریم

$$V(t) = {}_0I_t^{1-\alpha} V_O(t) = {}_0I_t^{1-\alpha} d'_O(t) = {}_0^C D_t^{\alpha} d_O(t)$$

که برای $0 < \alpha < 1$ مشتق کسری کاپوتو همان تعبیر فیزیکی مشتق کسری ریمان–لیوویل را داراست. این انطباق وقتی واضح‌تر می‌شود که $f(0) = 0$، در این صورت مشتق ریمان–لیوویل و مشتق کاپوتو از مرتبه α $(0 < \alpha < 1)$ برابرند

$${}_0^C D_t^{\alpha} f(t) = {}_0D_t^{\alpha} f(t).$$

شرط $f(0) = 0$، یک شرط لازم برای مسئله است [۱۱].

۳. نتیجه‌گیری

مطالب ارائه شده در این مقاله می‌تواند در شفاف‌سازی پیرامون تعبیر فیزیکی و هندسی مشتق و انتگرال‌گیری کسری سودمند باشد. از آن‌جایی که مشتق و انتگرال‌گیری با مرتبهٔ یک عدد صحیح تعبیرهای فیزیکی و هندسی روشنی دارد، این انتظار برای زمانی که مرتبهٔ مشتق عدد صحیح نباشد یک انتظار به‌جا به شمار می‌رود. از این رو ارائهٔ تعبیرهای فیزیکی و هندسی برای مشتق‌ها و انتگرال‌گیری‌های کسری می‌تواند منجر به ایجاد درک بهتر نسبت به حسابان کسری شود.

مراجع

[1] F. Ben Adda, *Geometric interpretation of the fractional derivative*, J. Fract. Calc. **11** (1997) 21–-52.

[2] H.F. Ding and X.Y. Zhang, *New numerical methods for the Riesz space fractional partial differential equations,* Comput. Math. Appl. **63** (2012), no. 7, 1135–1146.

[3] R. Gorenflo, *Afterthoughts on interpretation of fractional derivatives and integrals,* In: P. Rusev, I. Dimovski and V. Kiryakova (eds.), Transform Methods and Special Functions, pp. 589–591, Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, 1998.

[4] V. Kiryakova, *A long standing conjecture failed?* In: P. Rusev, I. Dimovski and V. Kiryakova (eds.), Transform Methods and Special Functions, pp. 579–588, Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, 1998.

[5] A.S. Leonov, *Applications of M. Riesz potentials for solving a 3D inverse problem of acoustic sounding,* J. Phys. Conf. Ser. **1205** (2019) 012036, 7 pp.

[6] F. Mainardi, *Considerations on fractional calculus: interpretations and applications,* In: P. Rusev, I. Dimovski and V. Kiryakova (eds.), Transform Methods and Special Functions, pp. 594–597, Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, 1998.

[7] A. McBride and G. Roach (eds.), *Fractional Calculus,* Research Notes in Mathematics 138, Pitman, Boston–London–Melbourne, 1985.

[8] M. Moshrefi-Torbati and J.K. Hammond, *Physical and geometrical interpretation of fractional operators,* J. Franklin Inst. B **335** (1998), no. 6, 1077–1086.

[9] R.R. Nigmatullin, *A fractional integral and its physical interpretation,* Theoret. and Math. Phys. **90** (1992), no. 3, 242–251.

[10] K. Nishimoto (ed.), *Fractional Calculus and Its Applications,* Nihon University, Koriyama, 1990.

[11] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations,* Academic Press, San Diego, 1999.

[12] I. Podlubny, *Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation,* Fract. Calc. Appl. Anal. **5** (2002), no. 4, 367–386.

[13] B. Ross, *Fractional Calculus and Its Applications,* Lecture Notes in Math. 457, Springer-Verlag, New York, 1975.

[14] R.S. Rutman, , *On physical interpretations of fractional integration and differentiation,* Theoret. and Math. Phys. **105** (1995), no. 3, 1509–1519.